Université Mohammed V
Faculté des sciences
Département de physique

Année universitaire 2016-2017
SMIA- S2

Série n°3 d'électrostatique

Continuité du potentiel à l'intérieur d'une distribution continue de charges

I. Soit une sphère de rayon R où la densité volumique ϱ est constante. Evaluer le potentiel dû aux charges contenues dans la sphère. En déduire la continuité du potentiel.

Application du théorème de Gauss

II. Calculer, au moyen du théorème de Gauss, le champ Electrostatique créé en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini chargé d'une densité linéaire λ. En déduire le potentiel.

III. Calculer, au moyen du théorème de Gauss, le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un plan infini portant une distribution de charges surfacique σ uniforme.

IV. Etudier le champ et le potentiel créés en tout point de l'espace par une sphère de rayon R portant une densité surfacique de charges σ uniforme. Faire la représentation graphique.

V. Une sphère de rayon R porte une densité volumique ϱ uniforme.

1) En appliquant le théorème de Gauss, évaluer le champ créé en un point M situé à la distance r du centre de la sphère chargée. Etudier sa variation lorsque r varie de zéro à l'infini.

2) En déduire le potentiel et étudier sa variation avec r.

3) Retrouver le potentiel créé par la sphère en utilisant l'équation de Poisson. (Expression locale du théorème de Gauss).

VI. En appliquant le théorème de Gauss, évaluer le champ créé par une couche cylindrique uniforme de longueur infinie en un point extérieur au cylindre.

Scanned by CamScanner

Influence électrostatique

VII. Soit une sphère S de rayon R. On approche de S deux hémisphères A et B dont les rayons sont R_1 et R_2 de telle manière que les trois surfaces soient concentriques.
S est portée à un potentiel V ; A+B au potentiel V'. Calculer les charges portées par les surfaces.

VIII. Une sphère S de centre O a un rayon R. Une 2° sphère S' creuse, d'épaisseur négligeable de rayon R'>R, est concentrique à S.

1) S et S' sont portées à un même potentiel V_2. Evaluer la répartition des charges.

2) S'est maintenue au potentielV_2. S est portée à un potentiel V_1. Evaluer les charges portées par S et S'.

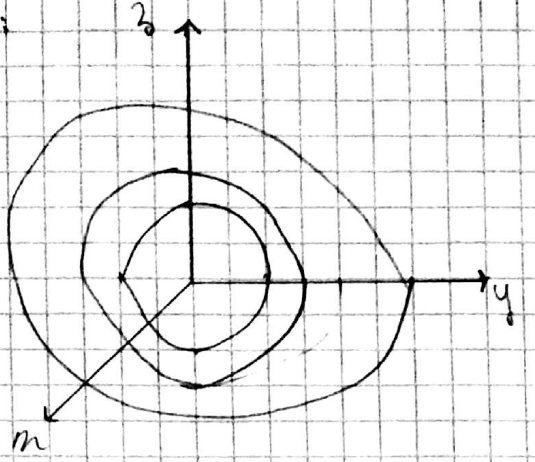
3) Calculer le champ E en un point M situé à la distance r du centre. Représenter la variation de E entre r=0 et r=∞.

Application numérique :R= 0,2m ;R'=0,3m ;$V_1=15.10^4$Volt ;$V_2=9.10^4$Volt.

Scanned by CamScanner

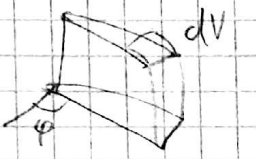
Série 3 :

I



$dV(\vec{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r}$.

$dq = \rho\, dV$; $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$



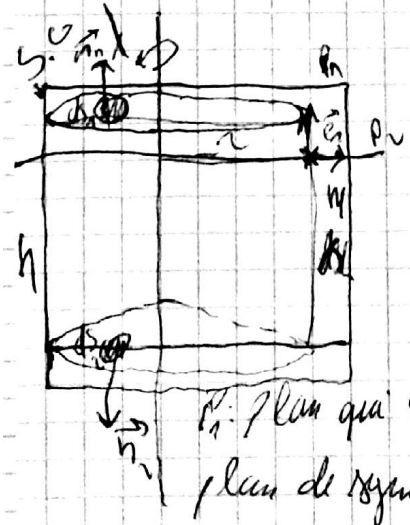
$dq = \rho r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$

$$V(M) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r^2 dr}{r} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

$$V(M) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

Rq : $V(M)$ est fini et tend vers 0 lorsque $R \to 0$

II



$E(M) = \vec{E}(r, \theta, z)$

P_1 : plan qui contient M et le fil plan de symétrie.

P_2 : plan ⊥ P_1 et contient M : plan de symétrie.

$\vec{E}(M) \in P_1 \cap P_2$

Invariance :

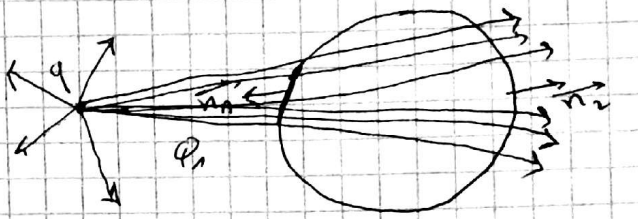
par rotation $\theta \to E \neq f(\theta)$

par translation selon z $E \neq z$

donc $\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$. $V(M) = V(r)$

Surface de Gauss :

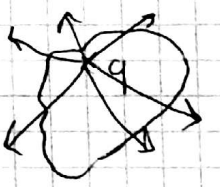
cylindre de révolution autour du fil, de rayon r et de hauteur h.



Th. Gauss :

$$\oiint_{S.G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum \Phi_{int}}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = 0$$



$$\oiint_{S.G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum \Phi_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_T = \iint E \cdot \vec{e_r} dS_1 \vec{n}_1 + \iint E \vec{e_r} dS_2 \vec{n}_2 + \iint_{S_L} E \vec{e_r} dS_L \vec{e_r}$$

$$\Phi_T = \iint_{S_L} E dS_L.$$

$dS_L = r\, d\theta\, dz$.

$$\Phi_T = E r \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = E \times 2\pi h$$

$$\frac{\sum \Phi_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\int \lambda dz}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E 2\pi h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{e_r}.$$

Scanned by CamScanner

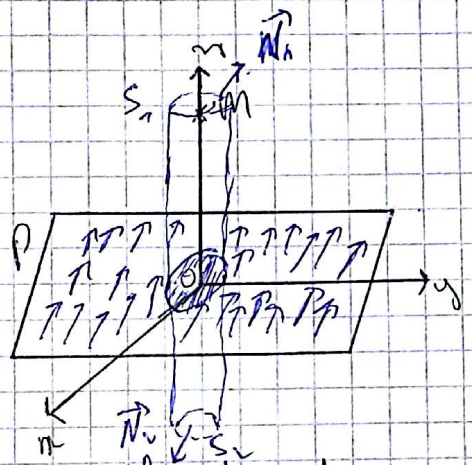
$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,V(M)$

$E = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V = -\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr$

$= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + cst$.

Rq: $cst \neq 0$, car présence de charge à l'infini ($V(\infty) \neq 0$).

- les lignes de champ sont des droites radiales et les surfaces équipotentielles sont des cylindres de révolution autour du fil.



$P_1(x0z)$ est un plan de symétrie.

$P_2(yoz)$ " " " "

$P_1 \cap P_2$: axe de symétrie.

$M \in P_1 \cap P_2 \Rightarrow E(M) \in P_1 \cap P_2$.

$\vec{E}(M) = E(M)\vec{k}$.

S.G. deux portions de tube de champ s'appuyant sur S (plan chargé) en fermé cette surface par S_1 et S_2 (de part et d'autre des plans)

Th. de G:

$\Phi_T = \oiint_{SG} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{\sum \varphi_{int}}{\varepsilon_0}$

$\Phi_T = \iint_{S_L} \vec{E}\,\vec{dS_L} + \iint_{S_1} \vec{E}\,\vec{dS_1} + \iint_{S_2} \vec{E}\,\vec{dS_2}$

car $\vec{E} \perp \vec{N}$

$\Phi_T = \iint_{S_1} \vec{E}\,\vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{E}\,\vec{dS_2} = ES_1 + ES_2$.

$S_1 = S_2 = S \Rightarrow \Phi_T = 2ES$.

R.q: $\iint -E\vec{k}\,.\,dS_2\vec{N}_2$

$= \iint -E\vec{k}\,dS_1(-\vec{k})$

$\sum \varphi_{int} = \gamma S$.

$2ES = \frac{\gamma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$.

IV.

1- Symétrie et invariances:

Tout plan passant par M et coupant la sphère selon son diamètre est: plan de symétrie (2 plans).

$\vec{E} = E(r,\theta,\varphi)\vec{e_r}$

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$

- Invariance par rotation θ et $\varphi \Rightarrow$

$\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$.

2) S.G: sphère de centre O et de rayon r

Th. G:

$\Phi_{(E/S.G)} = \oiint_{S.G} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{\sum \varphi_{int}}{\varepsilon_0}$

3- Calcul de E au point M:

Deux cas à étudier

- $r < R$.

$\frac{\sum \varphi_{int}}{\varepsilon_0} = 0$

$\Phi_{(E/S.G)} = \oiint_{S.G} \vec{E}\,\vec{dS} = E \cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

- $r > R$

$\frac{\sum \varphi_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_0}$

$\Phi_{(E/S.G)} = \oiint_{S.G} \vec{E}\,\vec{dS} = E\,4\pi r^2$

$\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{r^2}\vec{e_r}$ car $\vec{E} = \frac{\varphi_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$.

Scanned by CamScanner

4- Calcul de $V(r)$:

$\vec{E} = -\text{grad}\, V$

$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r \rightarrow V = V(r)$

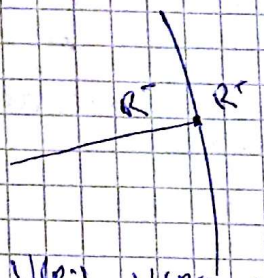
$dV = -E\,dr$

$\begin{cases} r < R ; E = 0 \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow V = C_1 = V_0 \\ r > R ; E = \dfrac{q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} ; dV = -\dfrac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr \end{cases}$

$V(r) = \dfrac{q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2$

$r \rightarrow \infty \quad V(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$V(r) = \dfrac{q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r}$



Si $r = R^-$

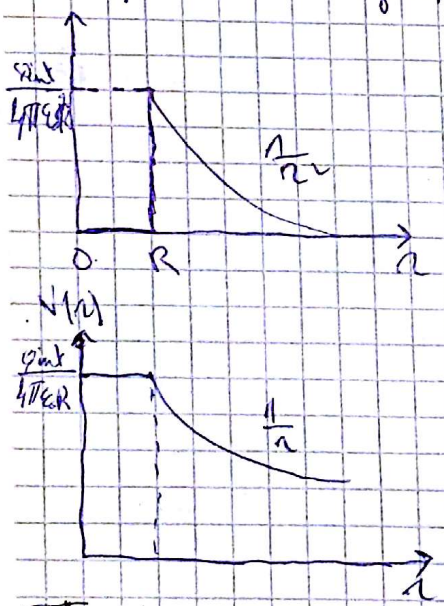
$V(R^-) = V_0$

Si $r = R^+$

$V(R^+) = \dfrac{q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 R}$

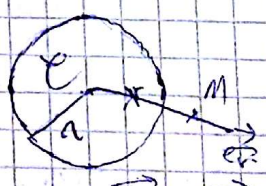
$V(R^-) = V(R^+) \Rightarrow V_0 = \dfrac{q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 R}$

5- Représentation graphique:



V-

1- Symétrie invariance identique [X]



$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$

2- S.G: Sphère de centre O et de rayon r.

- $\Phi_{(E.S.G)}$ de G:

$\Phi_{(E.S.G)} = \oint_{S.G} \vec{E}\,d\vec{S} = \dfrac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$

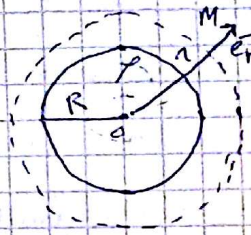
3- Calcul de E: Deux cas:

$r < R$

$\dfrac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{4}{3}\pi r^3$

$\Phi_{(E/S.G)} = \oint \vec{E}.d\vec{S} = E\,4\pi r^2$

$\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,\vec{e}_r$



$r > R$

$\dfrac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{4}{3}\pi R^3$

$\Phi_{(E/S.G)} = \oint \vec{E}.d\vec{S} = E.4\pi.r^2$

$\vec{E}(r) = \dfrac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

4- Calcul de $V(r)$

$\vec{E} = -\text{grad}\, V \Rightarrow \vec{E} = -\dfrac{\partial V}{\partial r}$

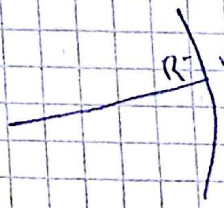
$\begin{cases} r < R ; E = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} ; dV = -\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} \\ V(r) = -\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C_1 \\ r > R ; E = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} ; dV = -\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \\ V(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_2 \end{cases}$

$r \rightarrow \infty \quad V(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$V(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$

Si $r = R^-$

$V(R^-) = -\dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + C_1$



Si $r = R^+$

$V(R^+) = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$

or: $V(R^-) = V(R^+)$

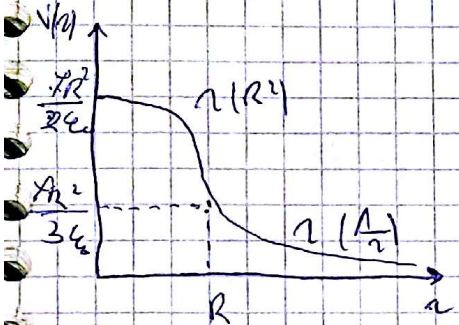
$-\dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + C_1 = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$

$C_1 = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$

Scanned by CamScanner

$\begin{cases} r<R : E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} ; V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \\ r>R : E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} ; V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R} \end{cases}$

5. Représentation graphique :



coord cartésiennes :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

coord cylindriques :

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

coord sphériques :

$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$\iint \vec{E}\,d\vec{S} = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$

$\iint \vec{E}\,d\vec{s} = \iiint \mathrm{div}\vec{E}\,dV$.

$\iiint \left(\mathrm{div}\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) dV = 0 \quad \mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\vec{E} = -\mathrm{grad}V \quad \mathrm{div}\vec{E} = -\mathrm{div}(\mathrm{grad}V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

E = radial. $V = V(r)$

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)$$

$$= \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV)$$

* $r>R$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rV) = A$$

$$rV = Ar + B.$$

$$V(r) = A + \frac{B}{r}.$$

$V(r) = 0 \to A = 0 \Rightarrow V(r) = \frac{B}{r}$.

* $r<R$ $\quad \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) = -\frac{\rho r}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rV) = -\frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0} + C.$$

$$rV = -\frac{\rho r^3}{6\varepsilon_0} + CV + D$$

$$V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C + \frac{D}{r}.$$

$r = 0 \quad D = 0$

$\begin{cases} r>R. \quad V(r) = \frac{B}{r}. \\ r<R \quad V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C \end{cases}$

B et C ? $\quad r = R$

$$\frac{B}{R} = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + C.$$

$r<R \; E = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$

$r>R \; E = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-B}{r^2}$

$r = R \Rightarrow -\frac{\rho R}{3\varepsilon_0} = \frac{-B}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R^3$

Scanned by CamScanner

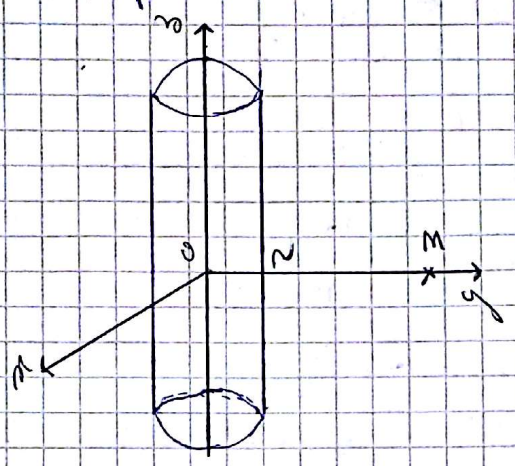
d'où

$r \geq R \quad V_e = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$

$r \leq R \quad V_i = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$

expressions identiques à celle trouvées précédemment.

VII.



1. Symétrie et Invariance :

(yoz) passant par M et coupant le cylindre selon son diamètre : plan de symétrie.

(Xoy) contenant M : plan de symétrie

$\Rightarrow \vec{E}$: radial $\Rightarrow \vec{E} = E(r,\theta,z)\vec{e_r}$

- Invariance par rotation θ
- Invariance par translation suivant y

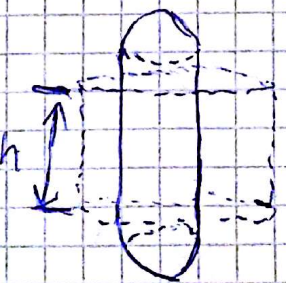
$\Rightarrow \vec{E} = E(r)\vec{e_r}$

2. * S.G. : cylindre d'axe autour de oz, de rayon r et de hauteur h.

* TH. G.

$\Phi_{(E/S.G)} = \oiint_{SG} \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{\sum \Phi_{int}}{\varepsilon_0}$

$r > R$



$\frac{\sum \Phi_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_S r\,d\theta \int_0^h dz = \frac{\sigma 2\pi r h}{\varepsilon_0}$

$\iint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \iint_S \vec{E}\,dS_1 + \iint \vec{E}\,d\vec{S}_2 + \iint_{S_L} E\,dS$

R.q :

$E \perp d\vec{S}_1, d\vec{S}_2, \vec{E}\,d\vec{S}_1 = \vec{E}\,d\vec{S}_2 = 0$

$\Phi_{(E/S_G)} = \iint_{S_L} \vec{E}\,\vec{S_L} = E \int_0 r\,d\theta \int_0^h dz$

$E\,2\pi r h$

$E\,2\pi r h = \frac{\sigma 2\pi R h}{\varepsilon_0}$

$\vec{E} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\vec{e_r}$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \Rightarrow dV = -E\,dr$

$dV = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\,dr$

$V = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln r + C$

Seule la différence de potentielle $V_1 - V_2$ en r_2 et r_1 a un sens physique

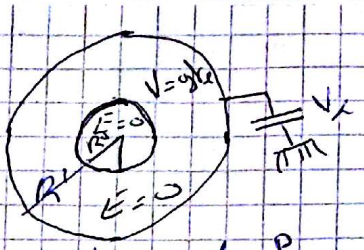
$V_1 = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln r_1 + C$

$V_2 = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln r_2 + C$

$V_1 - V_2 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$

Scanned by CamScanner

VII -

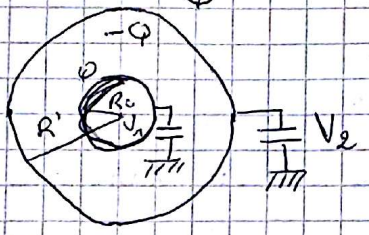


1) Si ne porte pas de charge.

Si ne porte de charges seule se peut porte des charges φ'

$V_2 = \frac{\varphi'}{4\pi\varepsilon_0 R'} \Rightarrow \varphi' = 4\pi\varepsilon_0 \cdot = 3.10^{-6} C$

2)



S_1 : porte la φ

S_i : porte la charge $-\varphi$

S_e : porte la charge φ'

$V_1 = \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R'} + \frac{\varphi'}{4\pi\varepsilon_0 R'}$

$V_2 = \frac{\varphi'}{4\pi\varepsilon_0 R'}$

Application du Th. G en $R' < r < R'$

$\frac{\sum \varphi_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\varphi}{\varepsilon_0}$

$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2 = \frac{\varphi}{\varepsilon_0}$

$E = \frac{\varphi}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$

$E = -\frac{\partial V}{\partial r}$

$\partial V = -E\, dr$

$\partial V = -\frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$

$V = \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$

pour $r = R'$ $\quad V = V_1$

$V(R') = V_1 = \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R'} - \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R'} + \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R'}$

$V(R') = \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R'} + C$

$V(R^-) = V(R^+) \Rightarrow C = \frac{-\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R'} + \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R'}$

$V = \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{\varphi'}{4\pi\varepsilon_0 R'}$

pour $r = R'$: $V(R') = \frac{\varphi'}{4\pi\varepsilon_0 R'} = V_2$

R. q :

$V_1 = \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R'} + V_2$

$V_1 - V_2 = \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)$

$\varphi = 4\pi\varepsilon_0 (V_1 - V_2) \frac{RR'}{R' - R}$

$\varphi = 4,1.10^{-6} C$

3) $r < R$ $\quad E = 0$

$R < r < R'$ $\quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\varphi}{r^2}$

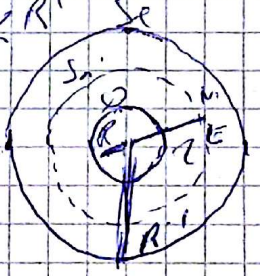
$r > R'$ $\quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\varphi'}{r^2}$

S.G Sphère de rayon r, de centre O

$r < R$

$\sum \varphi_{int} = 0 \Rightarrow E = 0$

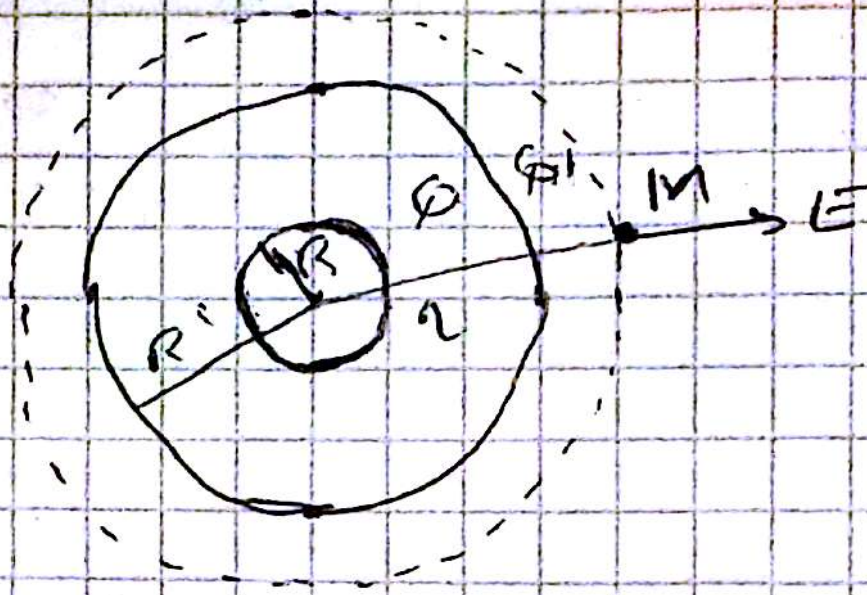
$R < r < R'$



$\frac{\sum \varphi_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\varphi}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

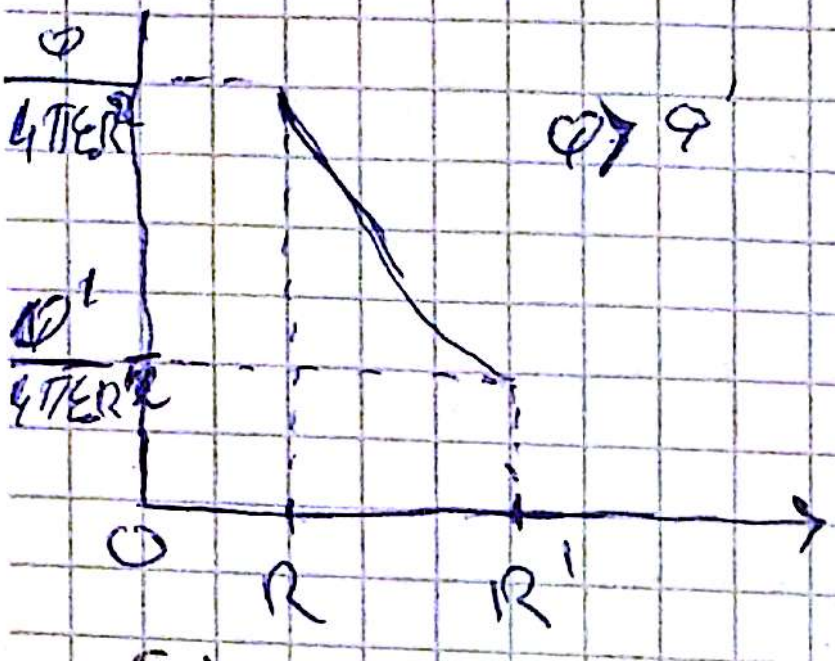
Scanned by CamScanner

$r > R'$



$$\sum Q_{int} = Q - Q + Q' = Q'$$

$$E = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



Scanned by CamScanner